

文章编号: 1000-8055(2003) 06-0737-07

齿轮时变系统对扭矩激励的响应

张锁怀¹, 沈允文², 董海军², 刘梦军²
(1. 陕西科技大学 机电学院, 陕西 咸阳 712081;
2. 西北工业大学 机电学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 在考虑齿轮时变啮合刚度、啮合阻尼和输入、输出扭矩波动的情况下, 建立了具有周期性时变系数的齿轮系统线性动力学方程, 用 A 算符方法(AOM)求出了该动力学系统的近似解析解。根据计算结果, A 算符方法(AOM)克服了谐波平衡法的缺点, 能够得到系统响应的所有频率成分, 计算精度更高; 与数值法相比, 可取较大步长, 省时间, 效率高; 系统受到内部或外部激励时, 响应中含有同频、倍频、差频及和频成分。

关键词: 航空、航天推进系统; A 算符方法(AOM); 齿轮系统; 时变啮合刚度; 扭矩波动
中图分类号: TH113.1; TH132.41 文献标识码: A

Response of a Gear System with Time-Varying Mesh Stiffness to Torque Fluctuation

ZHANG Suo-huai¹, SHEN Yun-wen², DONG Hai-jun², LIU Meng-jun²
(1. Shaanxi University of Science Technology, Xianyang 712081, China;
2. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The governing equation of a gear system is established. In the equation, the time-varying mesh stiffness, mesh damping, input and output torque fluctuations are considered. Due to the mesh stiffness of a gear pair, the governing equation represents a linear dynamic system with periodic time-varying coefficient. A-operator method (AOM) is used to obtain the approximate analytic solution. According to the results, A-operator method (AOM) overcomes the defaults of harmonic balance method and can keep all frequency components. In the response of the system, fundamental, double and composed frequency etc of time-varying mesh stiffness and torque fluctuation frequency coexist. A-operator method (AOM) takes less time than other numerical method.

Key words: aerospace propulsion system; A-operator method (AOM); gear system; time-varying mesh stiffness; torque fluctuation

负载大小发生变化、或驱动器转速波动时, 分别会引起齿轮系统输出、输入扭矩的变化, 这必将引起振动和噪音。过去人们研究齿轮系统的动力学问题时, 由于受数学方法和计算速度的限制, 常

将时变啮合刚度近似为常量^[1,2], 在研究非线性振动问题时, 又按分段线性处理^[3,4]。近年来, 随着对齿轮系统传动平稳性的要求愈来愈高, 现有的研究成果无法解释齿轮系统中的一些异常振动现

象^[5], 必须考虑齿轮时变啮合刚度这一时变因素, 才能对齿轮系统的动力学行为给出更为精确的描述。考虑齿轮时变啮合刚度后, 系统的动力学方程式将是一个具有周期性时变系数的线性微分方程^[6], 当存在其他激励因素时, 其响应完全不同于常系数线性动力系统的响应^[7]。由于受数学方法的限制, 目前这方面的研究工作进展缓慢。Adomian 提出的分解算法^[8]经人们推广后^[9,10], 能很好地用于研究具有时变啮合刚度的齿轮系统的动力学问题。

1 动力学方程式

图1所示的以二级齿轮系统为研究对象, 只考虑齿轮系统的扭转振动, 令:

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_0 - \varphi_1, & x_2 &= r_{b1}\varphi_1 - r_{b2}\varphi_2 \\x_3 &= \varphi_2 - \varphi_3, & x_4 &= r_{b3}\varphi_3 - r_{b4}\varphi_4 \\x_5 &= \varphi_4 - \varphi_5\end{aligned}$$

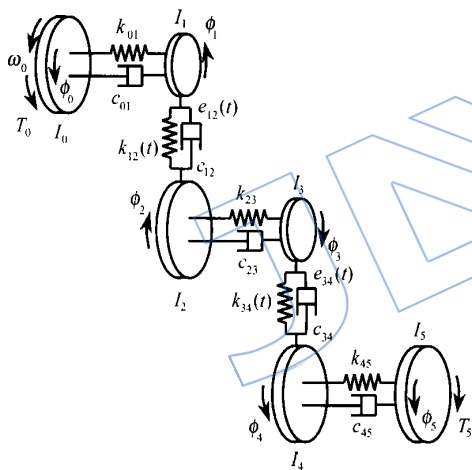


图1 二级齿轮系统振动模型

Fig. 1 Model of two-staged gear system

(φ 为原动机、齿轮、负载的转角, $i=0\sim5$), 可得动力学方程式为:

$$\begin{aligned}M\ddot{X} + [C_1 + A_2c_{12} + A_3c_{34}]\dot{X} + \\[K_1 + A_2k_{12}(t) + A_3k_{34}(t)]X = F\end{aligned}\quad (1)$$

式中:

$$\begin{aligned}X &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T \\A_2 &= [N_1 \ N_2 \ N_1 \ N_1 \ N_1]^T \\A_3 &= [N_1 \ N_1 \ N_1 \ N_3 \ N_1]^T \\N_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T\end{aligned}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{b1}c_{01}/I_1 & 0 & -r_{b2}c_{23}/I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{b3}c_{23}/I_3 & 0 & -r_{b4}c_{45}/I_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{b1}k_{01}/I_1 & 0 & -r_{b2}k_{23}/I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{b3}k_{23}/I_3 & 0 & -r_{b4}k_{45}/I_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$N_2 = [-r_{b1}/I_1 \ (r_{b1}^2/I_1 + r_{b2}^2/I_2) \ -r_{b2}/I_2 \ 0 \ 0]^T$$

$$N_3 = [0 \ 0 \ -r_{b3}/I_3 \ (r_{b3}^2/I_3 + r_{b4}^2/I_4) \ -r_{b4}/I_4]^T$$

$$C_{11} = (1/I_0 + 1/I_1)c_{01}$$

$$C_{33} = (1/I_2 + 1/I_3)c_{23}$$

$$C_{55} = (1/I_4 + 1/I_5)c_{45}$$

$$K_{11} = (1/I_0 + 1/I_1)k_{01}$$

$$K_{33} = (1/I_2 + 1/I_3)k_{23}$$

$$K_{55} = (1/I_4 + 1/I_5)k_{45}$$

式中, M 为 5 阶单位矩阵。根据文献[11] 计算齿轮时变啮合刚度, 然后用 Fourier 级数展开得:

$$\begin{aligned}k_{12}(t) &= \sum_{i=0}^{m_2} a_{k12i} \cos i\omega_{n12}t + \sum_{i=1}^{m_2} b_{k12i} \sin i\omega_{n12}t \\k_{34}(t) &= \sum_{i=0}^{m_2} a_{k34i} \cos i\omega_{n34}t + \sum_{i=1}^{m_2} b_{k34i} \sin i\omega_{n34}t\end{aligned}$$

$$F = [T_0/I_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ T_5/I_5]^T$$

驱动力矩 T_0 和阻力矩 T_5 用 Fourier 级数分别表示为:

$$\begin{aligned}T_0 &= \sum_{i=0}^{m_2} a_{T0i} \cos i\omega t + \sum_{i=1}^{m_2} b_{T0i} \sin i\omega t \\T_5 &= \sum_{i=0}^{m_3} a_{T5i} \cos i\omega t + \sum_{i=1}^{m_3} b_{T5i} \sin i\omega t\end{aligned}$$

以上各式中:

- I_0, I_5 —— 原动机、负载的转动惯量;
- I_i —— 齿轮 i 的转动惯量 ($i=1, 2, 3, 4$);
- c_{01}, c_{23}, c_{45} —— 材料扭转阻尼;
- k_{01}, k_{23}, k_{45} —— 材料扭转刚度;

c_{12}, c_{34} ——齿轮啮合阻尼;
 T_0, T_5 ——原动机驱动力矩、负载阻力矩;
 r_{bi} ——齿轮基圆半径($i=1, 2, 3, 4$);
 $\omega_{h12}, \omega_{h34}$ ——齿轮啮合频率;
 ω, ω_s ——驱动机和负载的变化频率;
 m_2, m_3 ——Fourier 级数的项数。

2 方程求解

令 $y = [X \ X]^T$, I 为单位矩阵。由于 M 也为单位矩阵, 系统动力学方程式(1)可转换为:

$$\dot{y} = Hy + F_1(t) + F_2(t, y) \tag{2}$$

式中:

$$H = - \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K_1 & C_1 \end{bmatrix}$$
$$F_1(t) = [N_1^T \ F^T]^T$$
$$F_2(t, y) = H_1(t)y$$

$$H_1(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{2k12}(t) + A_{3k34}(t) & A_{2c12} + A_{3c34} \end{bmatrix}$$

方程(2)初值解的一般表达式为:

$$y(t) = \exp H t \cdot y^{(0)} + y_1 + y_2 \tag{3}$$
$$y^{(0)} = y(t)|_{t=t_0=0}$$
$$y_1 = \int \exp H (t - \tau) \cdot F_1(\tau) d\tau$$
$$y_2 = \int \exp H (t - \tau) \cdot F_2(\tau, y(\tau)) d\tau$$

在式(3)中, y_1 与 y 无关, 可精确求出。把 y_1 归结到 $y^{(0)}$ 中去, 根据 $F_2(t, y)$ 构造 Adomian 多项式, 这样的计算结果通常比直接对 $F_1(t), F_2(t, y)$ 构造 Adomian 多项式进行计算的结果要好。根据 AOM 分解算法^[12], 式(3)的各阶近似解析解为:

$$y^{(0)} = \exp H h \cdot y_k + \sum_{i=0}^{m_3} \frac{\exp H h \cdot [H \cdot F_{a0i}(t_k)] + \overset{\circ}{F}_{a0i}(t_k)}{H^2 + (i\omega)^2 I} - \sum_{i=0}^{m_3} \frac{[H \cdot F_{a0i}(t_k + h)] + \overset{\circ}{F}_{a0i}(t_k + h)}{H^2 + (i\omega)^2 I} + \sum_{i=0}^{m_3} \frac{\exp H h \cdot [H \cdot F_{a5i}(t_k) + \overset{\circ}{F}_{a5i}(t_k)]}{H^2 + (i\omega)^2 I} - \sum_{i=0}^{m_3} \frac{[H \cdot F_{a5i}(t_k + h) + \overset{\circ}{F}_{a5i}(t_k + h)]}{H^2 + (i\omega)^2 I} \tag{5}$$

$$y^{(i)} = - H^{-1} (I - \exp H h) \cdot H_1(t_k) \cdot y^{(i-1)}(h; t_{k-1}, y_{t_{k-1}}) \tag{6}$$

式中: h ——时间步长
将式(5)与式(6)相加即得式(2)的近似解析解。
为了书写方便, 上式中, $y^{(i)}$ 表示 $y^{(i)}(h; t_k, y_{t_k}), i=1, 2, 3, \cdots$ 。

$$y_{t_k} = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(h; t_{k-1}, y_{t_{k-1}}) \tag{7}$$

$$F_{a0}(t) = [N_1 \ f_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$
$$F_{a5}(t) = [N_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5]^T$$
$$f_0 = \frac{[a r_{0i} \cos i \omega(t_k + t) + b r_{0i} \sin i \omega(t_k + t)]}{I_0}$$
$$f_5 = \frac{[a r_{5i} \cos i \omega(t_k + t) + b r_{5i} \sin i \omega(t_k + t)]}{I_5}$$

3 对扭矩激励的响应

齿轮系统结构参数如表1所列。在用 AOM 方法求解之前, 已对系统动力学方程式(1)进行了无

表1 齿轮系统参数

Table 1 Parameters of gear system	
齿轮齿数 z_1	23
齿轮齿数 z_2	73
齿轮齿数 z_3	27
齿轮齿数 z_4	83
驱动力矩 $a_{700}/(N \cdot m)$	1
阻力矩 $a_{750}/(N \cdot m)$	9.75
扭矩波动 $a_{701}/(N \cdot m)$	0.1
扭矩波动 $a_{751}/(N \cdot m)$	0.1
齿宽 $b_1, b_2/mm$	20
齿宽 $b_3, b_4/mm$	25
压力角 $/(^{\circ})$	20
转动惯量 $I_0/(kg \cdot m^2)$	5.551×10^{-4}
转动惯量 $I_1/(kg \cdot m^2)$	3.493×10^{-4}
转动惯量 $I_2/(kg \cdot m^2)$	3.545×10^{-2}
转动惯量 $I_3/(kg \cdot m^2)$	8.293×10^{-4}
转动惯量 $I_4/(kg \cdot m^2)$	7.406×10^{-2}
转动惯量 $I_5/(kg \cdot m^2)$	2.022×10^{-3}
阻尼 c_{01}, c_{23}, c_{45}	0.1
阻尼比 c_{12}, c_{34}	0.05
扭转刚度 $k_{01}/(N \cdot m)$	1.005×10^5
扭转刚度 $k_{23}/(N \cdot m)$	6.135×10^5
扭转刚度 $k_{45}/(N \cdot m)$	5.089×10^5

量纲化处理, 所以, 系统响应以无量纲形式给出。

由表1可知, 两级齿轮传动系统的速比分别为 $73/23=3.17$, $83/27=3.07$, 总速比为9.76。第一级齿轮传动的啮合频率 ω_{h12} 与输出轴角频率 ω_s 之比为 $z_4z_2/z_3=224.4$, 第二级齿轮传动的啮合频率 ω_{h34} 与输出轴角频率 ω_s 之比为 $z_4=83$ 。为了表达简洁、清晰, 频谱图的横坐标以频率比的形式给出, 它表示了系统的响应频率与输出轴的角频率 ω_s 的比值。输入轴转速为3000 r/min。

3.1 对输入扭矩激励的响应

只考虑时变啮合刚度的一次谐波, 输入轴上的恒扭矩如表1所列, 为1 N·m, 也只考虑输入轴上扭矩波动的一次谐波, 其幅值为0.1 N·m, 波动频率与输入轴的角频率 ω 相同。无扭矩波动时, 系统沿 x_2 和 x_4 方向的响应频谱如图2所示。根据图2, 虽然在系统内部只有二个激励频率, 即啮合频率 $\omega_{h34}=83$, $\omega_{h12}=224.4$, 但系统的响应中, 有多个频率成分, 除83, 224.4这两个基频分量外, 还

有其2倍频、3倍频及 $\omega_{h12}-\omega_{h34}$, $\omega_{h12}+\omega_{h34}$ 等成分, 3倍频以上的成分幅值很小。

只存在输入轴上扭矩波动时, 系统沿 x_2 和 x_4 方向的响应频谱如图3所示。与图2所示的无扭矩波动的情况相比, 除具有图2中的频率成分外, 还出现了新的频率成分, 对应的频率为9.76, 与输入轴的角频率相等。此外, 在啮合频率 ω_{h12} 附近, 也出现了新的频率成分, 其对应的频率为 $\omega_{h12}-\omega$ 和 $\omega_{h12}+\omega$ 。文献[7]用谐波平衡法研究齿轮-转子-轴承系统对时变啮合刚度和不平衡质量激励的响应时, 用解析式指出, 有 $\omega_{h12}-\omega$ 和 $\omega_{h12}+\omega$ 的谐波分量出现在系统的动力响应中, 可见, 此处所得结果与文献[7]是一致的。

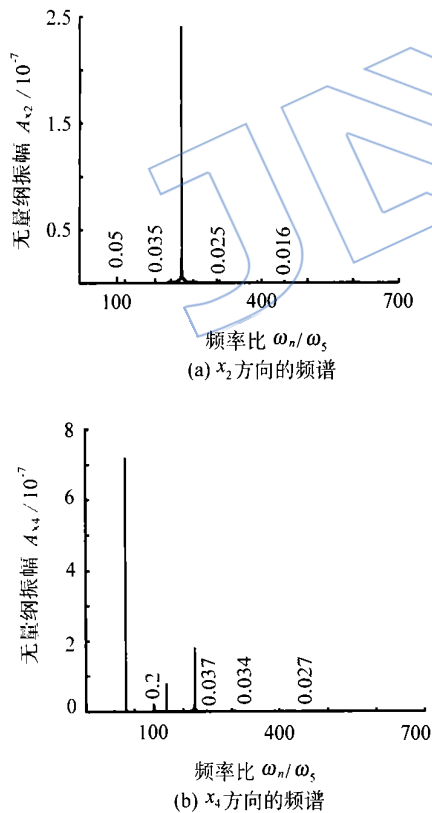


图2 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应
Fig. 2 Response on torque fluctuation in x_2 and x_4 direction

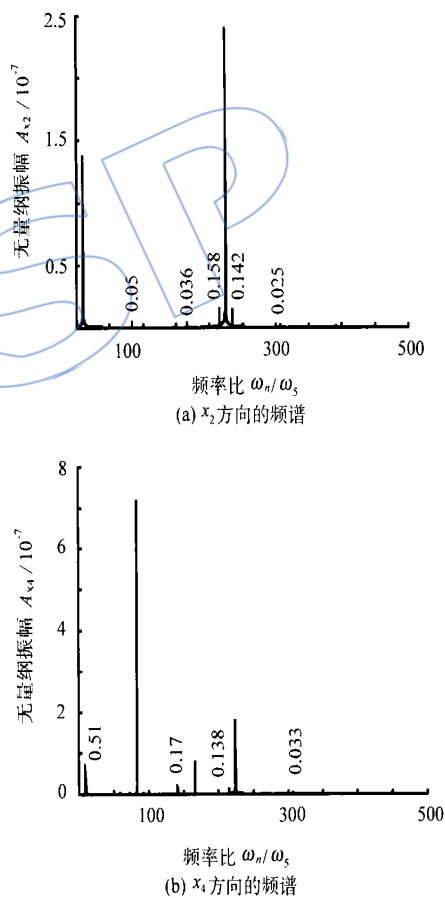


图3 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应
Fig. 3 Response on torque fluctuation in x_2 and x_4 direction

考虑时变啮合刚度的二次谐波时, x_2 和 x_4 方向的响应频谱如图4所示, 对应于 $2\omega_{h34}$ 处, 峰值明显增加, 其他各处的峰值变化不大, 动载系数、响应的幅值略有增加(文中没有给出)。

考虑时变啮合刚度的三次谐波时, 系统响应

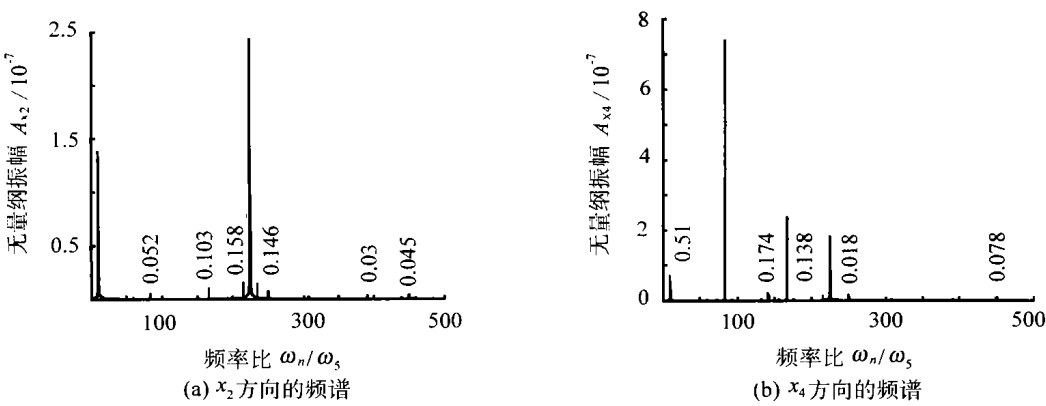


图4 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应

Fig. 4 Response on torque fluctuation in x_2 and x_4 direction

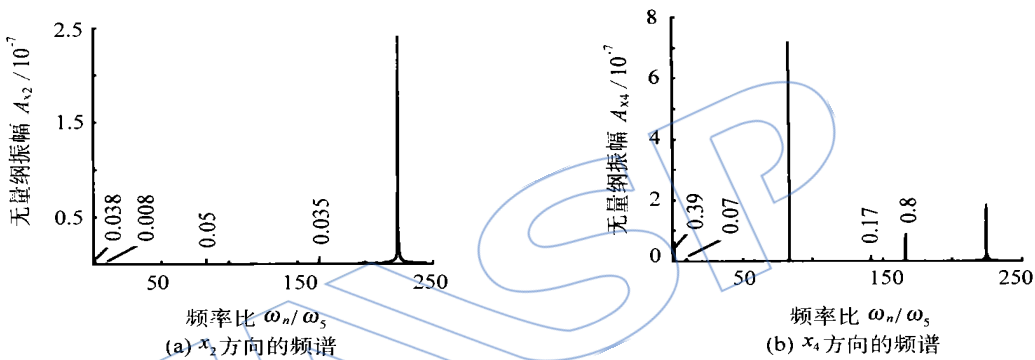


图5 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应

Fig. 5 Response on torque fluctuation in x_2 and x_4 direction

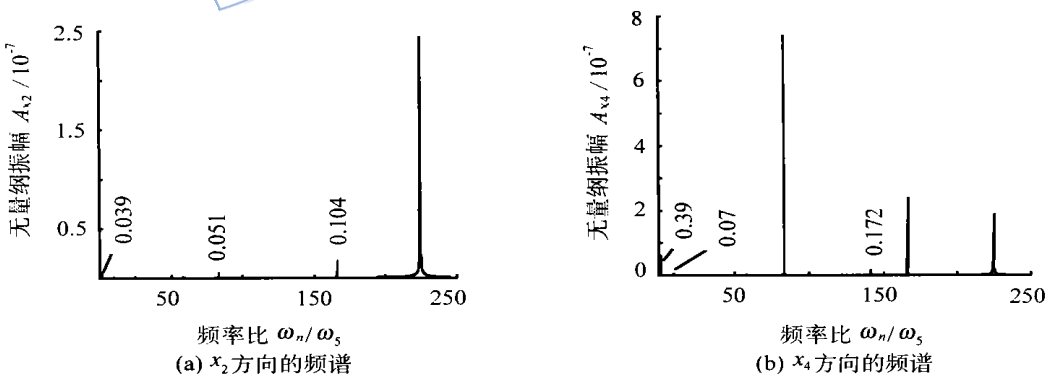


图6 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应

Fig. 6 Response on torque fluctuation in x_2 and x_4 direction

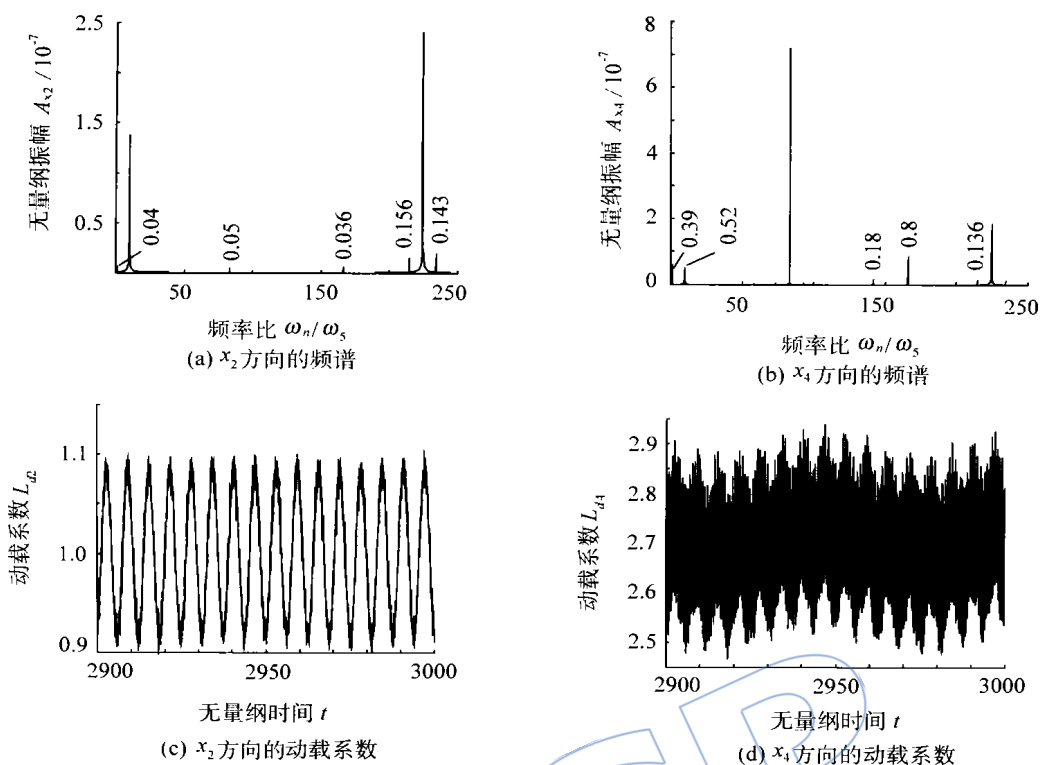
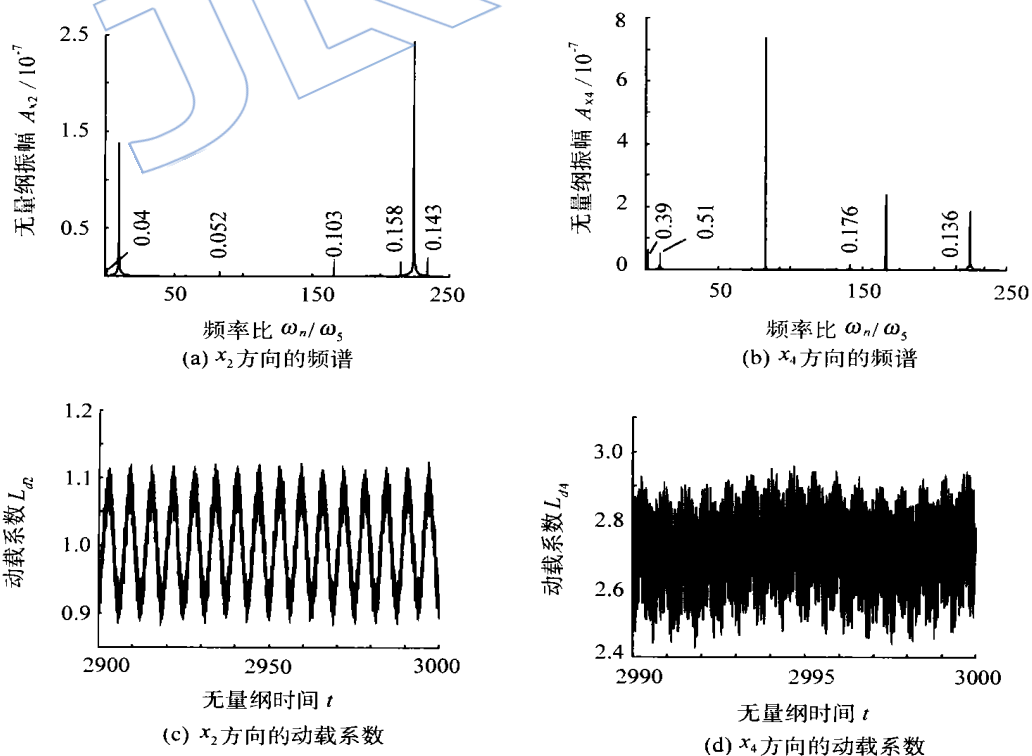
变化很小。

3.2 对输出扭矩激励的响应

输出轴上的扭矩波动幅值也取0.1 N·m, 波动频率与输出轴角频率相等。图5是其响应的频谱

谱, 为了清楚地表示频率等于1的频率分量, 只给出了较小的频率范围内的谱线。其规律与输入轴扭矩波动激起的响应规律相似。

当考虑时变啮合刚度的二次谐波时, 响应频谱如图6所示。

图7 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应及动载系数Fig. 7 Response on torque fluctuation and dynamic loads in x_2 and x_4 direction图8 x_2 及 x_4 坐标对扭矩激励的响应及动载系数Fig. 8 Response on torque fluctuation and dynamic loads in x_2 and x_4 direction

3.3 对输入和输出扭矩共同激励的响应

取扭矩波动幅值均为 $0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$, 波动频率分别等于输入轴和输出轴的角频率。

当考虑时变啮合刚度的一次谐波时, 系统的响应频谱及动载系数如图7所示。当同时考虑时变啮合刚度的一次谐波和二次谐波时, 系统的响应频谱及动载系数如图8所示。虽然系统响应的幅值、动载系数、各次频率分量的大小有一定变化, 但在本文特定的系统参数下, 就响应的频率成分而言, 其响应规律基本上是前述各种情况的组合。

4 讨 论

时变啮合刚度的引入, 使常系数线性系统变为具有周期性时变系数的线性系统, 其形式类似于 Hill 方程, 但它是一个多自由度系统。由于时变啮合刚度的影响, 系统的动力响应变得较为复杂。在常系数线性系统中, 系统响应的频率等于激励频率, 而在具有时变系数的线性系统中, 即使没有外部激励, 由于时变系数的影响, 在系统的响应中, 也包含有多种频率成分, 如时变啮合刚度的基频分量、倍频分量、差频分量及和频分量。当时变系统受到外部激励时, 其响应中除包含有上述频率成分及与激励频率相同的频率成分外, 还包含有其他新的频率成分, 其对应的频率大小等于时变系数的变化频率(啮合频率)与激励频率相加或相减。可见, 对于这类系统, 若想减少其振动的幅值、或降低噪音, 在设计阶段, 应进行动力学分析, 不但要使系统的固有频率避开啮合频率、各传动轴的角频率以及其他激励频率, 而且, 还要避开他们的倍频以及上述频率相加或相减所得的组合频率。

与谐波平衡法相比, AOM 法没有滤波特性, 能够保留系统响应的所有频率成分, 具有更高的精度、可靠性和实用性; 与其他数值方法相比, 由于 AOM 法给出了前几阶近似解析解, 没有迭代运算, 在保证计算过程收敛和计算精度的情况下, 可取较大的步长, 计算速度快, 节省时间。因此, AOM 法是分析非线性动力系统的有效方法, 具有明显的优越性。

5 结 论

(1) AOM 法作为一种分析非线性动力学问题的近似解析法, 克服了谐波平衡法的滤波缺陷, 使计算结果精度更高, 可靠性更高。

(2) 当线性时变系统受到内部或外部激励时, 系统响应中含有同频、倍频、差频及和频成分。

参考文献:

- [1] Hevzat H. Dynamic Analysis of High Speed Gears by Using Load Static Transmission Error[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 125(1): 71– 83.
- [2] Kahraman A, Ozgliven H N, Houser D R, et al. Dynamic Analysis of Geared Rotors by Finite Elements[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1992, 114: 507– 514.
- [3] Kahraman A, Singh R. Non-Linear Dynamics of a Geared Rotor-Bearing System with Multiple Clearances[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 144(3): 469– 506.
- [4] Kahraman A. Interactions Between Time-Varying Mesh Stiffness and Clearance Non-Linearities in a Geared System[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146(1): 135– 156.
- [5] Huang W Z, Ding K, Wang Z J. An Investigation on the Abnormal Vibration of a Centrifugal Compressor[M]. Pro. of IC – HBRSD '97, Beijing: National Defence Industry Press, 1997, 3: 234– 238.
- [6] 张锁怀. 齿轮耦合的转子- 轴承系统的动力特性研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2000.
- [7] 张锁怀, 李忆平, 丘大谋. 用谐波平衡法分析齿轮耦合的转子- 轴承系统的动力特性[J]. 机械工程学报, 2000, 36(7): 18– 22.
- [8] Adomian G. Solution of Coupled Nonlinear Partial Differential Equations by Decomposition[J]. Computer Math. Applic., 1996, 31(6): 117– 120.
- [9] 方锦清, 姚伟光. 逆算符方法求解非线性动力学方程及其一些应用实例[J]. 物理学报, 1993, 42(9): 1375– 1387.
- [10] 李华, 沈允文, 孙智民. 基于 A – 算符方法的齿轮系统的分岔与混沌[J]. 机械工程学报, 2002, 38(6): 11– 15.
- [11] Cai Y. Simulation on the Rotational Vibration of Helical Gears in Consideration of the Tooth Separation Phenomenon (A New Stiffness Function of Helical Involute Tooth Pair) [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995, 117(9): 460– 468.
- [12] 李华. 基于 AOM 的非线性机械系统动力分析理论及其应用[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.